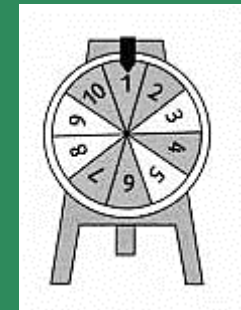
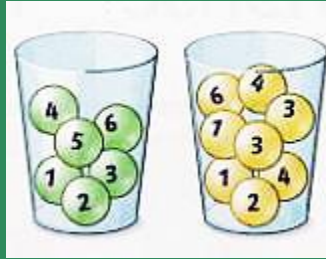


Zufall / Wahrscheinlichkeit

Grundbegriffe und Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Zufallsgeräte
- Wahrscheinlichkeit
- Ergebnisse und Ereignisse
- Summen- und Produktregel
- zweistufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme

Zufallsgeräte



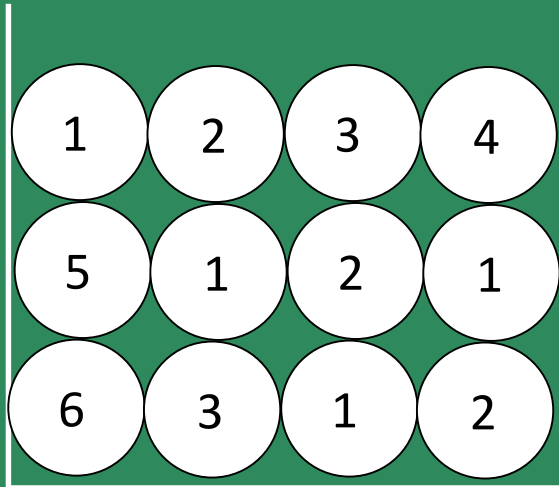
Laplace – Versuche:

Zufallsversuche bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace – Versuche. Zum Beispiel: Ziehen einer Kugel, Werfen eines Würfels, ...

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $P(E)$ ist der Quotient aus der Anzahl der günstigen Ergebnisse (m) und der Anzahl der möglichen Ergebnisse (n).

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Ergebnisse und Ereignisse



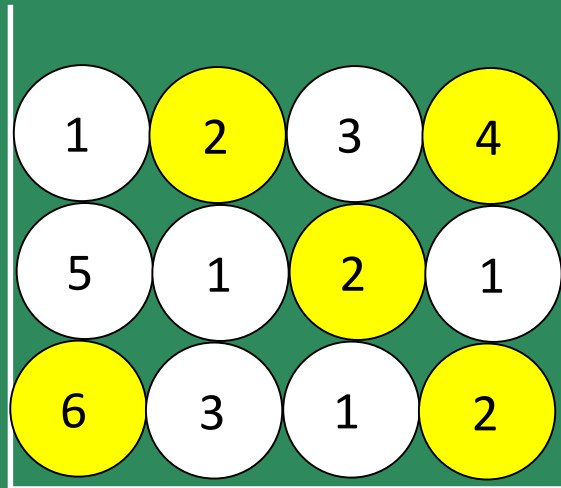
Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine **gerade Zahl** zu ziehen?

Wir betrachten mehrere **Ergebnisse**.

Mehrere Ergebnisse bilden ein **Ereignis**.

Ergebnisse und Ereignisse



Wie groß ist die
Wahrscheinlichkeit für das
Ereignis „gerade Zahl“?
günstige Fälle / mögliche Fälle =
 $5/12$

Wahrscheinlichkeiten für

Ergebnis 2:	$3/12$
Ergebnis 4:	$1/12$
Ergebnis 6:	$1/12$

Summenregel

Die Wahrscheinlichkeit für
ein Ereignis ist die Summe
der Wahrscheinlichkeiten
der Ergebnisse, die das
Ereignis bilden.

Zufall / Wahrscheinlichkeit

Ergebnis: Ausgang eines Zufallsversuchs

Ein Ereignis setzt sich aus *mehreren* Ergebnissen zusammen.

Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse.

Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1.

Das unmögliche Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0 .

Alle ungünstigen Ergebnisse bilden das Gegenereignis.

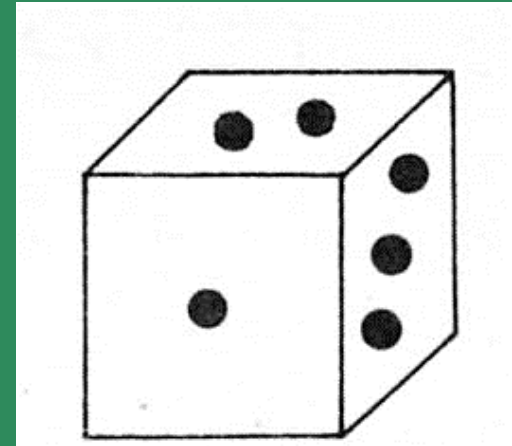
Ist p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ist $(1 - p)$.

Zufall / Wahrscheinlichkeit

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

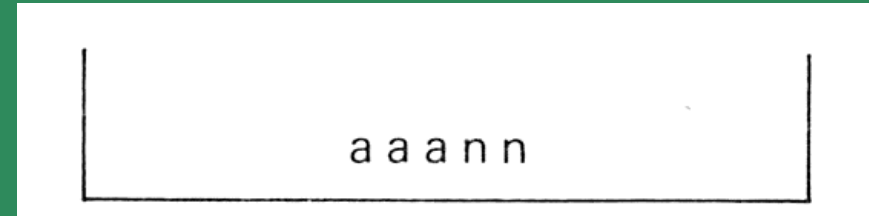
Die gewürfelte Zahl ist

- | | | |
|----|--------------------------------|----------|
| a) | gerade | 0,5 |
| b) | ungerade | 0,5 |
| c) | eine Primzahl | 0,5 |
| d) | eine Quadratzahl | 0,333... |
| e) | kleiner als 5 | 0,666... |
| f) | größer als 2 und kleiner als 5 | 0,333... |
| g) | kleiner als 7 | 1 |
| h) | größer als 6 | 0 |



Zweistufige Zufallsversuche

2-mal Ziehen **mit** Zurücklegen



Baumdiagramm, Produktregel

Mögliche Ergebnisse:

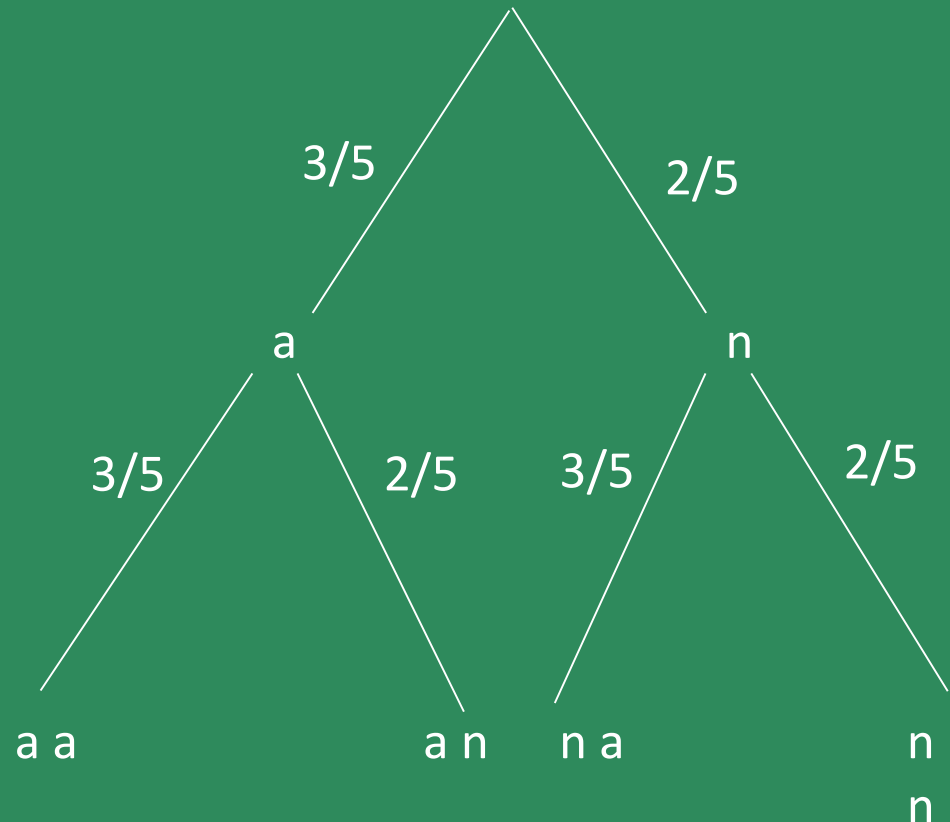
aa, an, na, nn

$$P(aa) = 3/5 * 3/5 = 9/25$$

$$P(an) = 3/5 * 2/5 = 6/25$$

$$P(na) = 2/5 * 3/5 = 6/25$$

$$P(nn) = 2/5 * 2/5 = 4/25$$

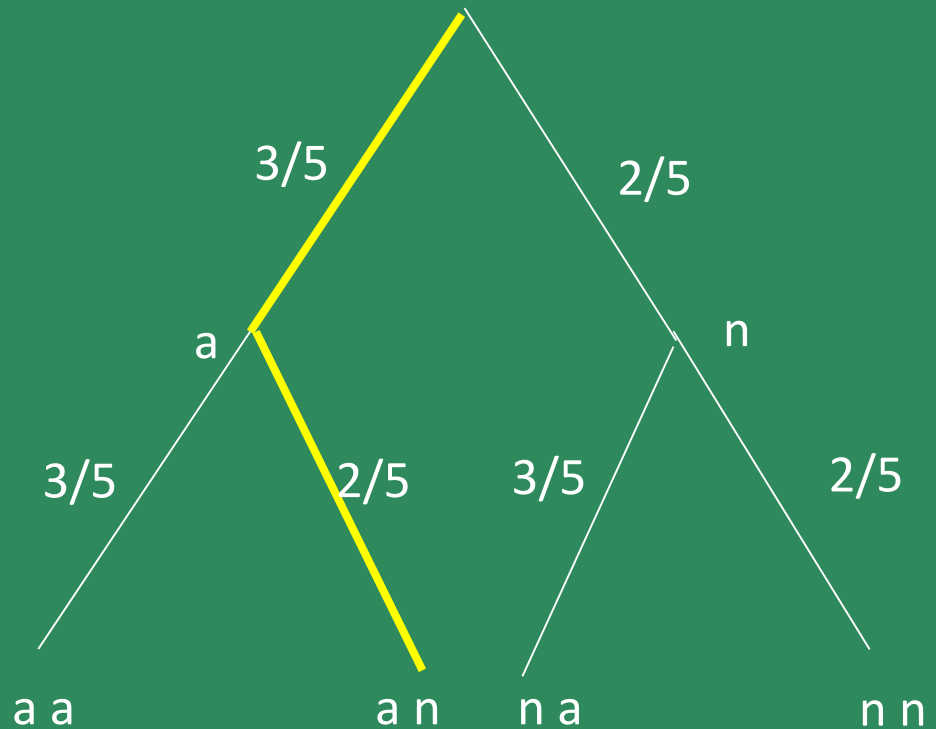


Produktregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades im Baumdiagramm erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert.

2/5 der Fälle von 3/5 der Fälle

$$P(an) = 3/5 * 2/5 = 6/25$$



Zweistufige Zufallsversuche

2-mal Ziehen *ohne* Zurücklegen

Mögliche Ergebnisse:

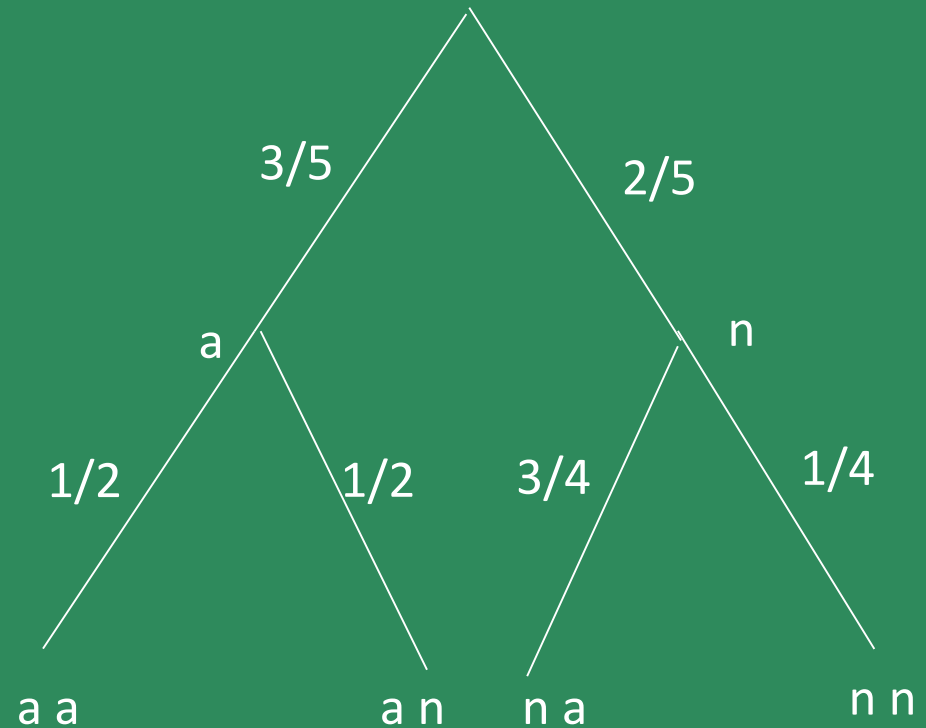
aa, an, na, nn

$$P(aa) = 3/5 * 1/2 = 3/10$$

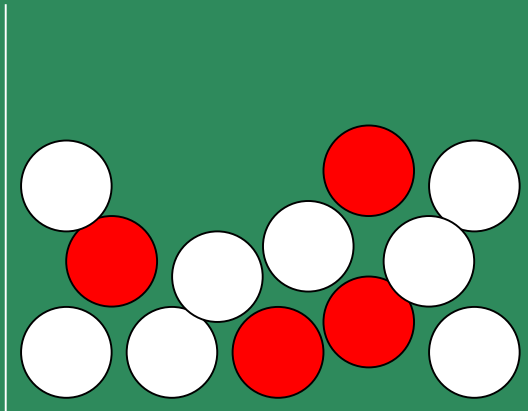
$$P(an) = 3/5 * 1/2 = 3/10$$

$$P(na) = 2/5 * 3/4 = 3/10$$

$$P(nn) = 2/5 * 1/4 = 1/10$$



Ziehen von Kugeln aus einer Urne



Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

- > Was ist günstiger?

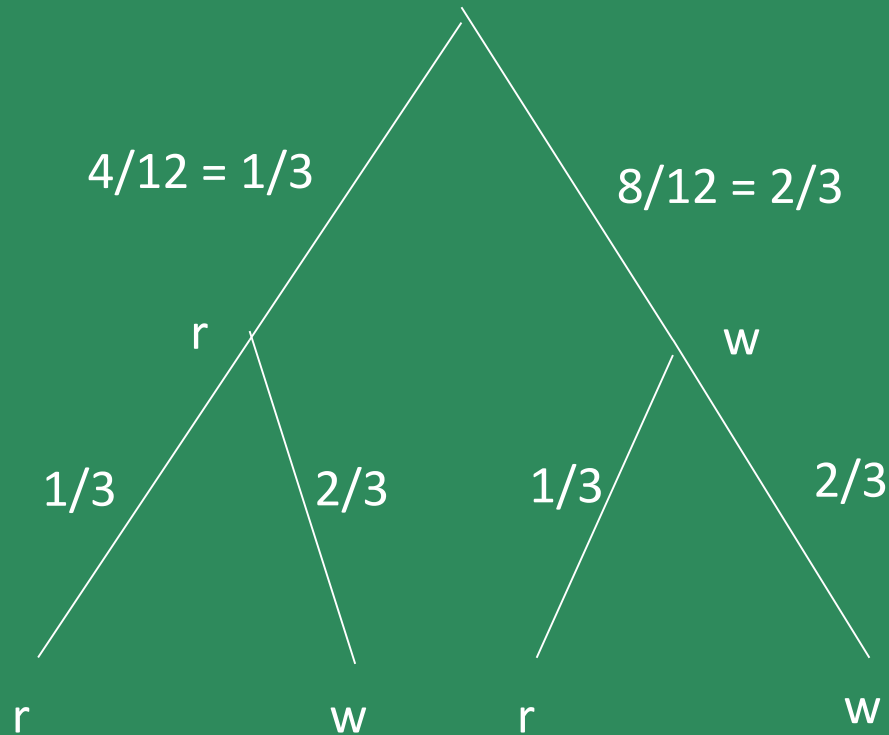
Zwei Kugeln mit gleicher Farbe oder mit unterschiedlicher Farbe zu ziehen?

Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

- > Was ist günstiger?

Zwei Kugeln mit gleicher Farbe oder mit unterschiedlicher Farbe zu ziehen?

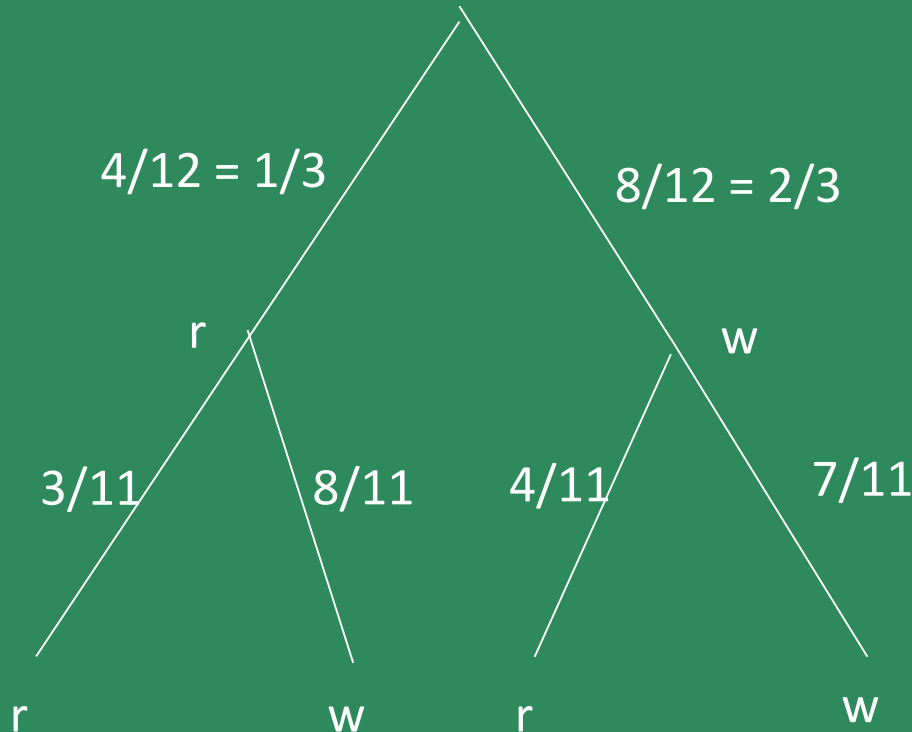
Mit Zurücklegen



$$P(r,w) + P(w,r) = 1/3 * 2/3 + 2/3 * 1/3 = 4/9$$

$$\rightarrow P(\text{gleiche Farbe}) = 5/9$$

Ohne Zurücklegen



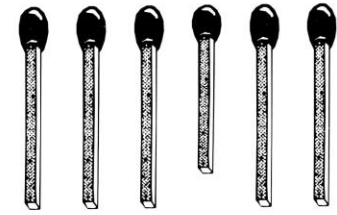
$$P(r,w) + P(w,r) = 1/3 * 8/11 + 2/3 * 4/11 = 16/33$$

$$\rightarrow P(\text{gleiche Farbe}) = 17/33$$

Hölzchen ziehen

Wer kennt nicht »Pinneken ziehen«?

Wenn man z. B. in einer Jugendherberge unliebsame Aufgaben wie Spülen, Kartoffelschälen oder Essraum fegen verteilen will, lässt man »Pinneken ziehen«. Um unter sechs Leuten ein Opfer zu finden, nimmt man sechs Streichhölzer und bricht eines davon ab.

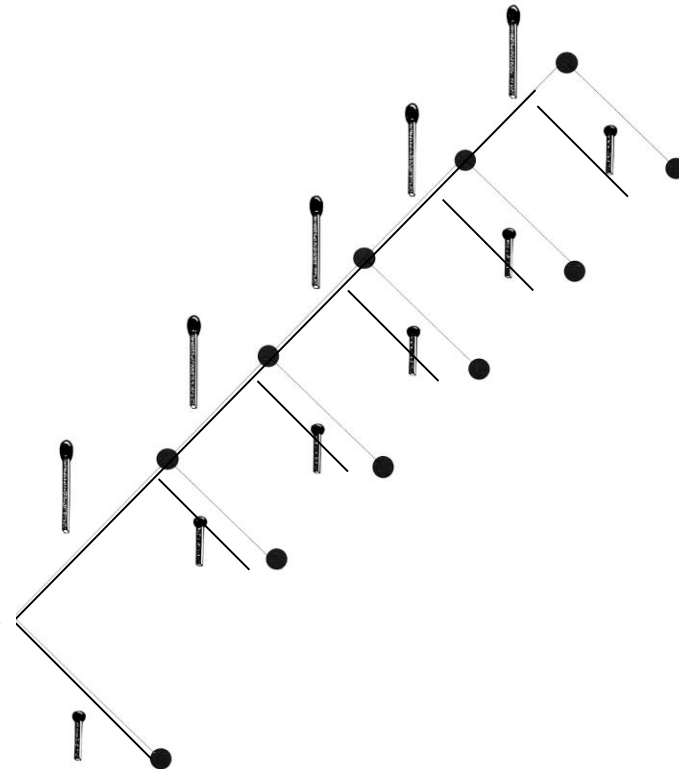


Man versteckt die sechs Streichhölzer in der Handfläche, so dass keiner der Betroffenen sehen kann, wo sich das abgebrochene Streichholz befindet. Nun zieht jeder der Beteiligten »ein Pinneken«. Klar, dass der, der das kürzere Streichholz zieht, das A ... streichholz gezogen hat und die unliebsame Aufgabe übernehmen muss.

Stell dir vor, du bist in einer solchen Situation. Möchtest du lieber als Erster »Pinneken« ziehen, oder ist es vielleicht günstiger, wenn du erst später dran bist? Was meinst du?

Vervollständige einmal das Baumdiagramm und wäge deine Chancen ab. Die Pfadregel hilft dir auf die Sprünge.

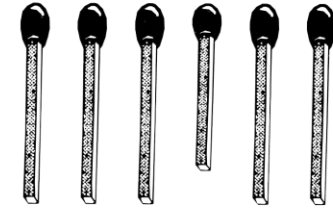
Start



Hölzchen Ziehen Lösung

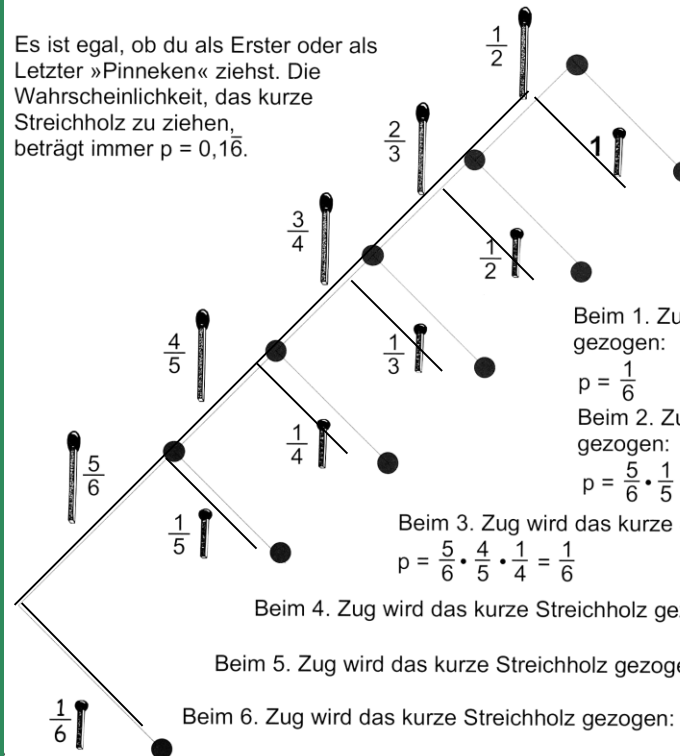
Wer kennt nicht »Pinneken ziehen«?

Wenn man z. B. in einer Jugendherberge unliebsame Aufgaben wie Spülen, Kartoffelschälen oder Essraum fegen verteilen will, lässt man »Pinneken ziehen«. Um unter sechs Leuten ein Opfer zu finden, nimmt man sechs Streichhölzer und bricht eines davon ab. Man versteckt die sechs Streichhölzer in der Handfläche, so dass keiner der Betroffenen sehen kann, wo sich das abgebrochene Streichholz befindet. Nun zieht jeder der Beteiligten »ein Pinneken«. Klar, dass der, der das kürzere Streichholz zieht, das A ... streichholz gezogen hat und die unliebsame Aufgabe übernehmen muss.



Stell dir vor, du bist in einer solchen Situation. Möchtest du lieber als Erster »Pinneken« ziehen, oder ist es vielleicht günstiger, wenn du erst später dran bist? Was meinst du? Vervollständige einmal das Baumdiagramm und wäge deine Chancen ab. Die Pfadregel hilft dir auf die Sprünge.

Es ist egal, ob du als Erster oder als Letzter »Pinneken« ziehst. Die Wahrscheinlichkeit, das kurze Streichholz zu ziehen, beträgt immer $p = 0,16$.



Beim 1. Zug wird das kurze Streichholz gezogen:

$$p = \frac{1}{6}$$

Beim 2. Zug wird das kurze Streichholz gezogen:

$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

Beim 3. Zug wird das kurze Streichholz gezogen:

$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Beim 4. Zug wird das kurze Streichholz gezogen: $p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Beim 5. Zug wird das kurze Streichholz gezogen: $p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Beim 6. Zug wird das kurze Streichholz gezogen: $p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$



Jemand bietet dir ein Würfelspiel an.
Dazu sollen zwei Würfel gleichzeitig geworfen
und die Augensumme gezählt werden.
Du darfst dir vorher aussuchen, ob du mit der
- Augensumme 5, 6, 7, 8
- oder mit allen anderen Augensummen
gewinnen möchtest.

Begründe deine Wahl.

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6



1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6



Augensumme 2:	1,1						
Augensumme 3	1,2	2,1					
Augensumme 4	1,3	2,2	3,1				
Augensumme 5	1,4	2,3	3,2	4,1			
Augensumme 6	1,5	2,4	3,3	4,2	5,1		
Augensumme 7	1,6	2,5	3,4	4,3	5,2	6,1	
Augensumme 8	2,6	3,5	4,4	5,3	6,2		
Augensumme 9	3,6	4,5	5,4	6,3			
Augensumme 10	4,6	5,5	6,4				
Augensumme 11	5,6	6,5					
Augensumme 12	6,6						



$$P(\text{Augensumme } 5, 6, 7 \text{ oder } 8) = 20/36 = 5/9$$

Wenn du eine gewöhnliche Münze sechsmal hintereinander wirfst, welche der folgende Ausgänge wirst du am wahrscheinlichsten beobachten?

WZW ZWZ

WWZ ZWW

WWW WWW

ZZW ZWZ

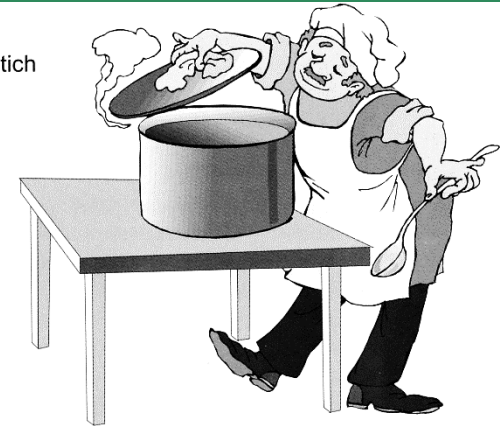
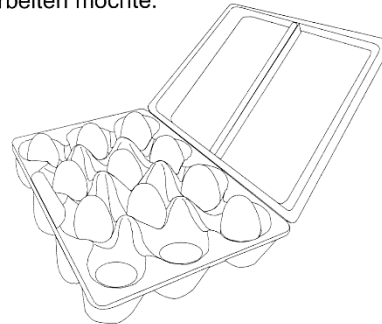
Alle angegebenen Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich



Jeweils $P(_,_,_,_,_,_) = 1/64$

Aufgabe Koch Spoilnix

Koch Spoilnix braucht für seine herrliche Rindfleischsuppe **zwei** Eier, die er als Eierstich verarbeiten möchte.

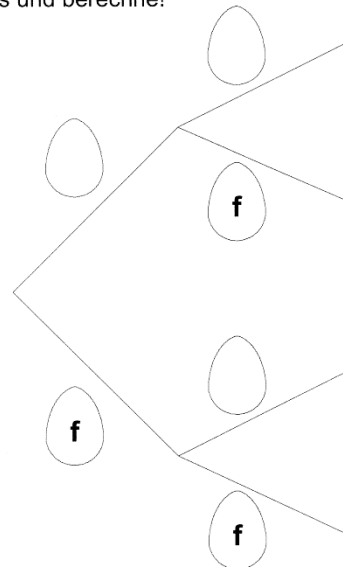


Unglücklicherweise sind von den **zehn** Eiern, die sich noch im Kühlschrank befinden, **drei** nicht mehr so ganz taufriech. Um es genauer auszudrücken, sie sind faul. Koch Spoilnix greift wahllos in die Eierleiste seines Kühlschranks, um sich nacheinander die benötigten zwei Eier zu holen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei Eier verarbeitet, von denen

- a) beide faul sind?
- b) eines faul ist?
- c) keines faul ist?

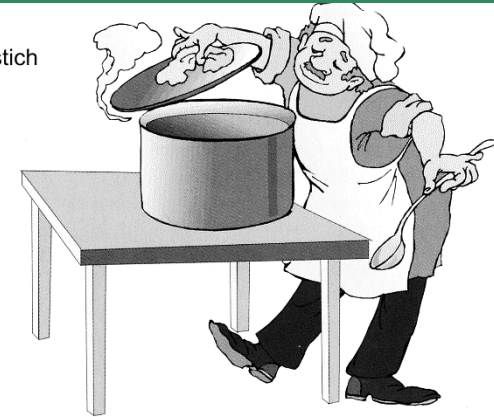
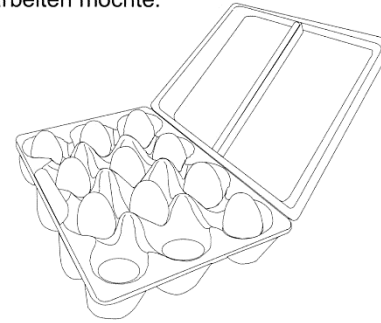
Es reicht ein vereinfachtes Diagramm, um die Pfad- bzw. die Summenregel anzuwenden. Ergänze es und berechne!



Aufgabe Koch Spoilnix

Lösung

Koch Spoilnix braucht für seine herrliche Rindfleischsuppe **zwei** Eier, die er als Eierstich verarbeiten möchte.

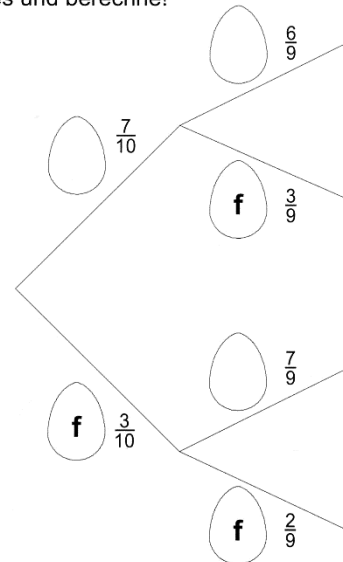


Unglücklicherweise sind von den **zehn** Eiern, die sich noch im Kühlschrank befinden, **drei** nicht mehr so ganz tafrisch. Um es genauer auszudrücken, sie sind faul. Koch Spoilnix greift wahllos in die Eierleiste seines Kühlschranks, um sich nacheinander die benötigten zwei Eier zu holen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei Eier verarbeitet, von denen

- a) beide faul sind?
- b) eines faul ist?
- c) keines faul ist?

Es reicht ein vereinfachtes Diagramm, um die Pfad- bzw. die Summenregel anzuwenden. Ergänze es und berechne!



- a) Beide Eier sind faul.

$$p = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} = 0,0\bar{6}$$

- b) Ein Ei ist faul.

$$p = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15} = 0,4\bar{6}$$

- c) Kein Ei ist faul.

$$p = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15} = 0,4\bar{6}$$

Fazit: Sollte Koch Spoilnix nicht vorher die Qualität der verwendeten Produkte prüfen, ist der Eierstich mit über 53,3-prozentiger Sicherheit ungenießbar.